Supplerende øvelser til

BASIS MATEMATIK

Grundforløbet

Dette supplement til *BasisMatematik · Grundforløbet* indeholder ekstra øvelser til de første syv kapitler samt nogle mere generelle øvelser, der ikke er knyttet til et særskilt kapitel i lærebogen.

Øvelserne har forskellig karakter. Nogle viser udfordringer fra historiens matematik, andre viser sider af stoffet, der ikke blev fundet plads til i lærebogen, og atter andre peger frem mod det, du senere får mulighed for at lære i faget.

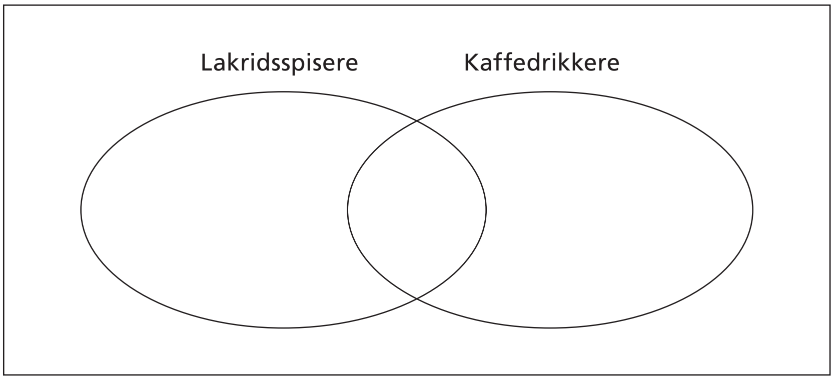
For alle øvelser gælder dog, at der er skruet en anelse op for sværhedsgraden i forhold til lærebogen. God fornøjelse!

HAASE FORLAG

1 · TALMÆNGDER

ØVELSE 1

a) Blandt 200 nye 1.g'ere på et gymnasium spiser 150 lakrids, og 120 drikker kaffe. 90 er både lakridsspisere og kaffedrikkere. Hvor mange spiser hverken lakrids eller drikker kaffe? Indsæt oplysningerne i en tegning som denne:



b) Fra et andet gymnasium med 1000 elever oplyses det, at:

- 525 af eleverne spiser lakrids,
- 312 drikker kaffe,
- 470 spiser chokolade,
- 42 spiser både lakrids og drikker kaffe,
- 147 spiser chokolade og drikker kaffe,
- 86 spiser lakrids og chokolade,
- 25 drikker kaffe og spiser både chokolade og lakrids.

Undersøg, om disse oplysninger kan være rigtige.

ØVELSE 2

Mængden $\{a,b\}$ har delmængderne Ø, $\{a\}$, $\{b\}$ og $\{a,b\}$. Læg mærke til, at den tomme mængde Ø (mængden uden elementer) også er en delmængde af $\{a,b\}$, fordi alle elementer i den tomme mængde også er elementer i $\{a,b\}$.

a) Opskriv alle delmængder af $\{a,b,c\}$.

b) Hvor mange delmængder har en mængde med 0 elementer? 1 element? 2 elementer? 3 elementer? 4 elementer? 5 elementer? n elementer?

ØVELSE 3

Vis formlerne:

a) $1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{1}{2}n(n + 1)$

b) $1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1) = n^2$

ØVELSE 4

Find fejlen i følgende »bevis« for, at 2 = 1:

$$\begin{aligned} a = b \quad &\Leftrightarrow && \text{(ganger/dividerer med } a\text{)} \\ a^2 = ab \quad &\Leftrightarrow && \text{(}b^2 \text{ trækkes fra/lægges til)} \\ a^2 - b^2 = ab - b^2 \quad &\Leftrightarrow && \text{(opløses i faktorer/ganges ud)} \\ (a-b)(a+b) = b(a-b) \quad &\Leftrightarrow && \text{(dividerer/ganger med } a - b\text{)} \\ a + b = b \quad & && \end{aligned}$$

Da $a = b$ (se første linje af beviset), kan vi i den nederste linje erstatte b med a, og får så, at:

$$2a = a \quad \Leftrightarrow \quad 2 = 1$$

ØVELSE 5

En gammel matematisk opgave, som kan spores til det antikke Grækenland, lyder: »Fæld en tåre, når du går forbi, for vi er Antiochos' gæster, som huset slog ihjel, da det brast sammen, og Gud gav os dette sted såvel til fest som til grav. Fire fra Tegea ligger her, tolv fra Messene, fem fra Argos, og halvdelen af gæsterne var fra Sparta, og Antiochos selv. En femtedel af en femtedel af de døde var fra Athen, og du, Korinth, græder kun for Hylas alene. Sig os, hvor mange huset slog ihjel!« Svar på tekstens spørgsmål. (*Tip*: Sæt x til at være antallet af personer, som døde, og opstil en ligning.)

ØVELSE 6

En gammel indisk tekst fra det 12. århundrede lyder: »Af en dynge ægte lotusblomster blev en tredjedel, en femtedel og en sjettedel ofret til henholdsvis guderne Shiva, Vishnu og Solen; en fjerdedel blev foræret til Brahma. De sidste seks blomster blev givet den ærværdige lærer. Sig mig hurtigt, hvor mange blomster der var!« Svar på tekstens spørgsmål.

ØVELSE 7

Når man skal løse ligninger, er **nulreglen** ofte nyttig. Den siger, at produktet af to tal er nul, netop når ét af tallene er nul. Matematisk formuleres det således:

$$a \cdot b = 0 \quad \Leftrightarrow \quad a = 0 \quad \text{eller} \quad b = 0.$$

Dette gør det muligt at løse ligninger som $(x - 2)(x - 6) = 0$:

$$\begin{aligned} (x-2)(x-6) = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad x - 2 = 0 \quad \text{eller} \quad x - 6 = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad x = 2 \quad \text{eller} \quad x = 6 \end{aligned}$$

Løs selv ligningerne:

a) $(2x + 3)(8x - 4) = 0$

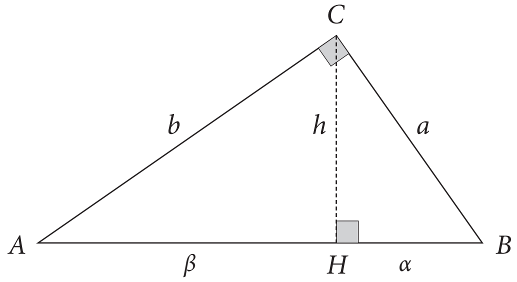
b) $(x - 7)(x + 5)(3x - 8) = 0$

c) $x(x - 1)(5x + 2)(8 - x) = 0$

ØVELSE 8

Du skal bevise Pythagoras' sætning for en retvinklet trekant ved hjælp af ensvinklede trekanter.

Betragt en retvinklet trekant ABC med C som den rette vinkel, og navngiv vinkler, sider m.m. som vist på figuren.



a) Vis, at trekanterne AHC, CHB og ACB er ensvinklede.

b) Vis, ud fra $CHB \sim ACB$, at $\frac{a}{c} = \frac{\alpha}{a}$, og omskriv til $a^2 = \alpha c$.

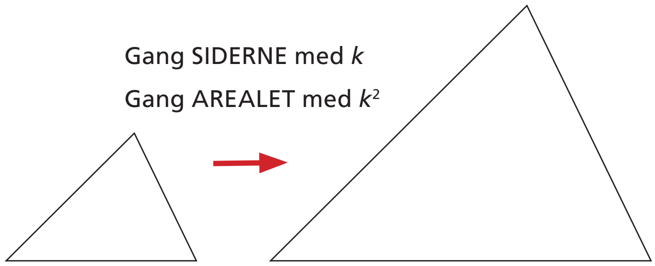
c) Vis tilsvarende ud fra $AHC \sim ACB$, at $b^2 = \beta c$.

d) Udregn ud fra a) og b) et udtryk for $a^2 + b^2$. (*Tip*: Undervejs skal du sætte c uden for en parentes og benytte, at $c = \alpha + \beta$).

Når du er færdig, har du vist Pythagoras' sætning, $a^2 + b^2 = c^2$.

ØVELSE 9

Der gælder: Hvis to trekanter er ligedannede med skalafaktor k, så er forholdet mellem deres arealer k^2, som vist på figuren:

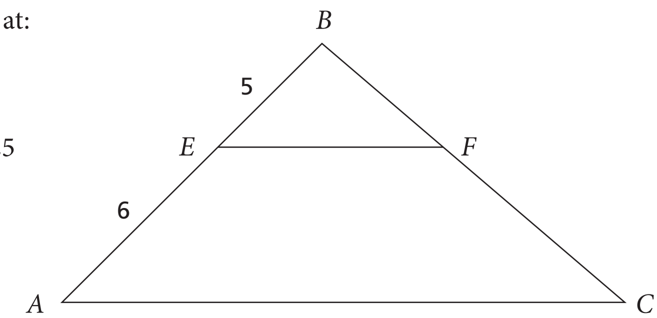


Om figuren til højre oplyses det, at:

- $AC || EF$
- $|BE| = 5$, $|EA| = 6$
- Arealet af trekant EBF er 25

a) Vis, at trekanterne ABC og EBF er ensvinklede.

b) Beregn arealerne af henholdsvis trekant ABC og trapez $AEFC$.



4 · EN LIGNING FOR DEN RETTE LINJE

ØVELSE 10

Man kan vise, at to ikke-lodrette linjer er parallelle, hvis *og kun hvis* de har samme stigningstal.

Undersøg, om l og m er parallelle:

a) l: $y = 3x + 2$ og m: $y = 3x + 7$

b) l: $y = 4x - 3$ og m: $y = 5x - 11$

c) l: $2x + y = 5$ og m: $y = -2x + 3$

d) l: $3x - 4y = 17$ og m: $y = \frac{1}{2}x + 6$

ØVELSE 11

Man kan vise, at to linjer er **ortogonale** (dvs. vinkelret på hinanden), hvis *og kun hvis* produktet af deres stigningstal er -1.

Eksempel: Linjerne l: $y = -3x + 2$ og m: $y = \frac{1}{3}x - 7$ har stigningstal $a_l = -3$ og $a_m = \frac{1}{3}$.

Derfor er produktet af deres stigningstal $a_l \cdot a_m = -3 \cdot \frac{1}{3} = -1$, og dermed er linjerne ortogonale.

Undersøg, om linjerne l og m er ortogonale i følgende tilfælde:

a) l: $y = 5x - 2$ og m: $y = -0{,}2x + 2018$

b) l: $y = 4x + 100$ og m: $y = -\frac{1}{2}x - 2$

Find en ligning for den linje m, som er ortogonal med linjen l: $y = -\frac{1}{3}x + 7$, når:

c) m går gennem punktet (0,3).

d) m går gennem punktet (4,1).

ØVELSE 12

En cirkels tangent er en linje, som er vinkelret på radius, og som rører cirklen.

En cirkel har centrum i punktet $C(2,3)$ og radius 5.

a) Vis, at punktet $P(6,0)$ ligger på cirklen.

b) Find en ligning for cirklens tangent i P.

(Tip: Tegn omhyggeligt situationen på et stykke papir i et koordinatsystem.)

5 · LIGNING FOR EN RET LINJE GENNEM TO PUNKTER

ØVELSE 13

I *BasisMatematik · Grundforløbet* har vi benyttet étpunktsformlen til bestemmelse af ligningen for en ret linje. Man kan også gå lidt anderledes til værks. Et eksempel:

Vi ønsker at bestemme en ligning for linjen gennem punkterne $A(2,7)$ og $B(6,19)$. Vi finder som sædvanlig stigningstallet:

$$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{19-7}{6-2} = \frac{12}{4} = 3$$

Nu er linjens ligning på formen $y = 3x + b$. Vi finder herefter b-værdien ved at indsætte koordinaterne til et af punkterne i denne ligning. Vi indsætter koordinaterne til A og får:

$$7 = 3 \cdot 2 + b \quad \Leftrightarrow \quad 7 = 6 + b \quad \Leftrightarrow \quad b = 1$$

Ligningen for den linje, som går gennem $A(2,7)$ og $B(6,19)$, er $y = 3x + 1$ (husk at kontrollere, om A's og B's koordinater passer i ligningen).

Find selv ligningen for linjen gennem punkterne:

a) $A(1,-3)$ og $B(2,7)$
b) $A(3,-5)$ og $B(7,6)$
c) $A(4,2)$ og $B(9,1)$
d) $A(-6,-1)$ og $B(-2,-4)$
e) $A(2,3)$ og $B(11,11)$
f) $A(1,-3)$ og $B(5,-3)$
g) $A(10,20)$ og $B(20,70)$
h) $A(-10,-20)$ og $B(-20,70)$

ØVELSE 14

En ret linje l går gennem punkterne $(2,5)$ og $(15,10)$. Afgør, om punktet $(12,9)$ ligger på linjen.

ØVELSE 15

Lad to linjer være givet ved $y = ax + 3$ og $y = 7x - 9$. Linjerne skærer hinanden i punktet $(2,k)$. Bestem a.

ØVELSE 16

Antag, at Jorden er en kugle med en omkreds ved ækvator på 40 000 km. Forestil dig, at der lægges et reb langs ækvator på jordoverfladen. Rebet skæres over og forlænges med 1 m.

a) Hvis rebet spændes ud på pæle, så det igen danner en cirkel, hvor lange skal pælene så være?

b) Er der plads til at stikke en hånd ind under snoren?

ØVELSE 17

Find skæringspunktet mellem linjerne:

a) $2x - 3y + 10 = 0$ og $5x - 2y = 8$

b) $6x + 4y + 8 = 0$ og $-3x + 2y = 8$

ØVELSE 18

Find eventuelle skæringspunkter mellem:

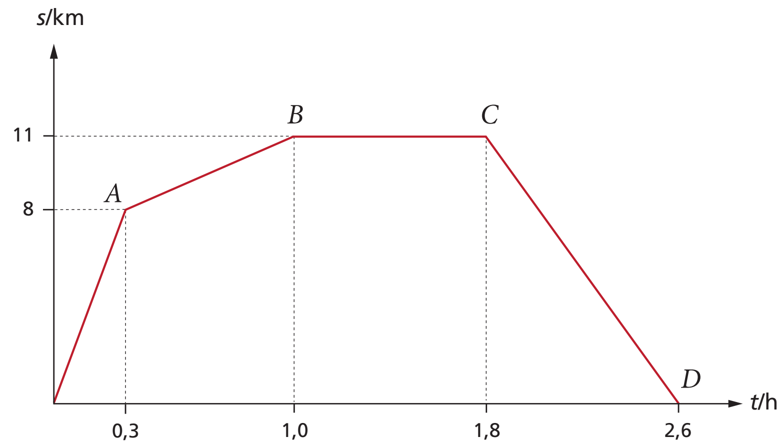
a) Linjen med ligningen $y = 6x + 25$ og parablen med ligningen $y = x^2 + 6x + 9$. Tegn graferne (evt. ved brug af Geogebra), og kontrollér resultatet.

b) Linjen med ligningen $y = x$ og cirklen med ligningen $x^2 + y^2 = 50$. Tegn graferne (evt. ved brug af Geogebra), og kontrollér resultatet.

(*Tip*: Tænk som i metode 6.3 fra *Basismatematik · Grundforløbet*.)

ØVELSE 19

Figuren herunder viser strækningen målt i kilometer (km) som funktion af tiden målt i timer (h) for en cykelrytter.



Husk, at hastigheden netop er stigningstallet for linjestykket.

a) Bestem rytterens hastighed i tidsrummet 0-0,3 timer.

b) Bestem rytterens hastighed i tidsrummet 0,3-1 timer.

c) Bestem rytterens hastighed i tidsrummet 1-1,8 timer.

d) Bestem rytterens hastighed i tidsrummet 1,8-2,6 timer.

e) Hvornår kører rytteren fremad?

f) Hvornår kører han tilbage?

g) Hvornår spiser han frokost?

BLANDET GODS

ØVELSE 20

En bil kører uden last 90 km/t og med last kun 30 km/t. Hvad er bilens gennemsnitshastighed, hvis den er lastet på udturen og ikke er lastet på hjemturen? (Nej, den er *ikke* 60 km/t).

ØVELSE 21

Ved et stort møde var der et hundrede politikere til stede. Hver enkelt politiker var enten ærlig eller uærlig. Du får oplyst, at:

– der mindst var én ærlig politiker til stede,
– når to af de tilstedeværende politikere var sammen, var mindst en af dem uærlig.

Kan man ud fra disse konkrete oplysninger regne ud, hvor mange af politikerne der var ærlige, og hvor mange uærlige?

ØVELSE 22

Du står ved en brønd og ønsker at tage 4 liter vand med dig. Til rådighed har du kun to spande (uden målestreger!) på henholdsvis 3 og 5 liter. Hvordan vil du gøre?

ØVELSE 23

En mand skal bringe en ulv, en ged og et kålhoved over en flod ved hjælp af sin båd. Han kan kun medbringe én af de tre, hver gang han sejler. Hvordan kan han gå frem, hvis han vil forhindre, at geden æder kålen, eller ulven æder geden?

ØVELSE 24

Et antal ægtepar ønsker at krydse en flod ved hjælp af en båd, som kun kan rumme to personer. Det skal ske på den måde, at ingen kvinde må efterlades i selskab med en mand, uden at hendes ægtemand også er til stede.

a) Løs opgaven for tre ægtepar. (*Tip*: Man skal krydse floden mere end ni gange.)
b) Vis, at opgaven for fire ægtepar ikke har nogen løsning.
(Det kan være en god idé at navngive ægteparrene, fx mændene med store bogstaver A, B, C og kvinderne med de tilsvarende små bogstaver a, b, c – eller omvendt.)

Flemming Pedersen og Christian Thybo:
Supplerende øvelser til BasisMatematik · Grundforløbet

Forlagsredaktion: Michael Haase og Mette Viking
Teksten i øvelse 5 er oversat af forfatterne fra *The Greek Anthology*, Vol. 5, The Loeb Classical Library, 1918. Teksten i øvelse 6 er fra *Lîlâvatî* af Bhâskara. Den danske oversættelse er ukendt.
1. ebogsudgave 2018 · Filversion 1.01 · ISBN 978-87-559-5153-2

HAASE FORLAG · www.haase.dk