# 3 Teknisk Matematik

## FACITLISTE

Preben Madsen

Med kapitel af
Thomas Bolander

2. udgave

PRAXIS – Nyt Teknisk Forlag

# Teknisk matematik 3 - Facitliste

## Indhold



## 1. Vektorregning i rummet

1.01 a) $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 5 \\ -5 \\ -3 \end{pmatrix}$ b) $|\overrightarrow{AB}| = 7{,}68$

1.02 a) $|\overrightarrow{AB}| = 2{,}45,\ |\overrightarrow{AC}| = 4{,}12,\ |\overrightarrow{BC}| = 5{,}39$ b) $A = 107{,}51°$ c) $\text{Areal} = 4{,}81$

d) $M_{BC} = (3;\ 3;\ 1{,}5)$ e) $|\overrightarrow{m_{BC}}| = 2{,}06$

1.03 a) $T(1; 1{,}5; 4),\ A(2,0,0),\ B(2,3,0),\ C(0,3,0),\ D(0,0,0)$ b) $|s| = 4{,}39$

1.04 a) $A(3,0,0),\ B(3; 2{,}5; 0),\ C(3,5,0),\ D(1{,}5; 1; 3),\ E(1{,}5;\ 2{,}5;\ 3),\ F(1{,}5;\ 4;\ 3)$

b) $|AD| = 3{,}5\text{ m},\ |AE| = 4{,}18\text{ m},\ |BE| = 3{,}35\text{ m},\ |AE| = |CE| = 4{,}18\text{ m}$

$|AD| = |CF| = 3{,}5\text{ m}$

1.05 a) - b) 1) $a_{xy} = 3$ 2) $a_{yz} = 4$ 3) $a_{xz} = 2$ 4) $a_x = 3{,}61$ 5) $a_y = 5$ 6) $a_z = 4{,}47$

1.06 a) Fremstiller en kugle med centrum $(2,-6,-3)$ og radius $r = 7$

b) Fremstiller en kugle med centrum $(8,5,0)$ og radius $r = 11$

c) Fremstiller en kugle med centrum $(-4, 7, 9)$ og radius $r = 12$

1.07 a) $\vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} -3 \\ 8 \\ -4 \end{pmatrix}$, $|\vec{a} + \vec{b}| = 9{,}43$ b) $(-2{,}11, -2)$

1.08 a) $\vec{p} + \vec{q} + \vec{r} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 11 \end{pmatrix}$, $|\vec{p} + \vec{q} + \vec{r}| = 12{,}53$

b) $\vec{p} - \vec{q} - \vec{r} = \begin{pmatrix} -10 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix}$, $|\vec{p} - \vec{q} - \vec{r}| = 11{,}36$

c) $2\vec{p} + 4\vec{q} - 3\vec{r} = \begin{pmatrix} 7 \\ -16 \\ -4 \end{pmatrix}$, $|2\vec{p} + 4\vec{q} - 3\vec{r}| = 17{,}92$

1.09 a) $\overrightarrow{e_a} = \begin{pmatrix} -0{,}384 \\ 0{,}512 \\ 0{,}768 \end{pmatrix}$

1.10 a) $v = 134{,}39°$

1.11 a) $t = 8$

1.12 a) $A = 118{,}22°$, $B = 40{,}70°$, $C = 21{,}08°$

1.13 $\vec{a}$ er parallel med $\vec{b}$, da $1{,}5\vec{a} = \vec{b}$

1.14 a) $t = 12$ b) $t = -34\frac{2}{3}$

1.15 a) $|\overrightarrow{b_a}| = 5{,}76$ b) $|\overrightarrow{a_b}| = 3{,}61$

1.16: *x*-aksen: $\begin{pmatrix} t \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, *y*-aksen: $\begin{pmatrix} 0 \\ t \\ 0 \end{pmatrix}$, *z*-aksen: $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ t \end{pmatrix}$

1.17 a) $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + 2t \\ 2 - 4t \\ -4 + 9t \end{pmatrix}$ eller $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 + 2t \\ -2 - 4t \\ 5 + 9t \end{pmatrix}$

b) Skæring med *xy*-plan: (1,89; 0,22; 0), skæring med *xz*-plan: (2; 0; 0,5), skæring med *yz*-plan: (0; 4; −8,5)

1.18 $A, B$ og $C$ ligger på en ret linje, da $\overrightarrow{AC} = 3\overrightarrow{AB}$

1.19 a) Linjerne har ikke et skæringspunkt b) Linjerne er vindskæve

1.20 a) Linjerne har et skæringspunkt b) Skæringspunktet er $(2{,}5{,}4)$

1.21 a) Linjerne har ikke et skæringspunkt b) Linjerne er vindskæve

1.22 a) $v = 96{,}49°$ b) $\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} 42 \\ 27 \\ 36 \end{pmatrix}$

1.23 $\text{Areal} = 72$

1.24 a) $\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} -54 \\ 69 \\ 60 \end{pmatrix}$ b) $\text{Areal} = 106{,}19$

1.25 a) $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -5 \\ 5 \\ -5 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix}$ b) $10x + y - 9z + 15 = 0$

1.26 a) Punktet $(5, 3, 4)$ ligger i planet b) $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -5 \\ -3 \\ -0{,}429 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -13{,}33 \\ -3 \\ -4 \end{pmatrix}$

1.27 a) $19x + 7y + 2z - 198 = 0$

1.28 a) $z = 0$ b) $ATB: 3x + z - 12 = 0$, $ATD: 3y + z - 12 = 0$,

$CTB: 3y - z = 0$, $CTD: 3x - z = 0$

1.29 $BCGKF: y = 0$, $ADHJE: y = 14$, $ABFE: x = 8$, $CDHG: x = 0$, $ABCD: z = 0$

$EFKJ: 3x + 4z - 36 = 0$, $KJHG: -3x + 4z - 12 = 0$

1.30 $5x - 2y + 2z - 17 = 0$

1.31 a) $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 + 1t \\ 32 + 14t \\ 84 + 37t \end{pmatrix}$ b) $v = 51{,}04°$

1.32 a) $v = 68°$

1.33 a) $(x, y, z) = (0, 8, 1)$ b) $v = 8{,}76°$

1.34 a) $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + 4t \\ 4 - 2t \\ 3 - 3t \end{pmatrix}$ b) $(x, y, z) = (-2{,}11;\ 5{,}56;\ 5{,}33)$ c) $v = 43°$

1.35 a) $v = 33{,}40°$ b) $v = 85{,}26°$

1.36 $e = 5{,}51$

1.37 $e = 4{,}04$

1.38 $e = 5{,}31$

1.39 $e = 9{,}25$

1.40 a) Planerne er parallelle, da $\overrightarrow{n_2} = -3\overrightarrow{n_1}$ b) $e = 0{,}43$

1.41 a) $e = 11{,}84$ b) $2x + y + z - 33 = 0$ c) $(16{,}5;\ 0;\ 0),\ (0, 33, 0),\ (0, 0, 33)$

1.42 a) $A(6, 10, 2),\ B(6, 0, 2),\ C(0, 0, 2),\ D(0, 10, 2),\ E(3, 7, 4),\ F(3, 3, 4)$ b) $|\overrightarrow{AE}| = 4{,}69$

c) $2x + 3z - 18 = 0$ d) $2x - 3z + 6 = 0$ e) $v = 67{,}38°$

1.43 a) $(1; -3{,}5; -0{,}5)$ b) $(x-4)^2 + (y-1)^2 + (z+2)^2 = 5{,}61^2$

## 2. Trigonometriske funktioner

2.01 a) 57,30° b) 134,46° c) 231,80° d) 342,24°

2.02 a) 0,9460 b) 2,3702 c) 4,4803 d) 5,9638

2.03 a) $x = 1{,}0759$ eller $x = 2{,}0657$ b) $x = 5{,}9575$ eller $x = 3{,}4673$

2.04 a) $x = 0{,}4275$ eller $x = 5{,}8557$ b) $x = 1{,}8029$ eller $x = 4{,}4803$

2.05 a) $x = 1{,}3819$ eller $x = 4{,}5235$ b) $x = 5{,}7727$ eller $x = 2{,}6311$

2.06 a) $L = [0;\ 3{,}7360[$ eller $]5{,}6888;\ 2\pi]$ b) $L = [0;\ 0{,}8038]$ eller $[2{,}3378;\ 2\pi]$

c) $L = [0;\ 0{,}2014[$ eller $]2{,}9402;\ 3{,}8492]$ eller $[5{,}5756;\ 2\pi]$

2.07 a) $L = [2{,}3746;\ 3{,}9086]$ *b) L = [0; 1,0701[ eller* $]5{,}2130;\ 2\pi]$

c) $L = ]1{,}3694;\ 2{,}1652]$ eller $[4{,}1180;\ 4{,}9137[$

2.08 a) $L = [1{,}5222;\ 0{,}5\pi[$ eller $[4{,}6639;\ 1{,}5\pi[$ b) $L = ]0{,}5\pi;\ 2{,}3562[$ *eller* $]1{,}5\pi;\ 5{,}4978[$

c) $L = [0{,}1974;\ 0{,}9151[$ eller $[3{,}3390;\ 4{,}0567[$

2.09 a) $x = 0{,}4636 + \pi \cdot n$ eller $x = 1{,}071 + \pi \cdot n$

b) $x = 0{,}2318 + \frac{\pi}{2} \cdot n$ eller $x = 0{,}5536 + \frac{\pi}{2} \cdot n$

2.10 a) $x = 1{,}5708 + 2\pi n$ eller $x = 3{,}6652 + 2\pi n$ eller $x = 4{,}7124 + 2\pi n$ eller

$x = 5{,}7596 + 2\pi n$

b) $x = \pi n$ eller $x = 0{,}7227 + 2\pi n$ eller $x = 5{,}5605 + 2\pi n$

2.11 a) $x = 0{,}3664 + 2\pi n$ eller $x = 2{,}7752 + 2\pi n$ eller $x = 3{,}7339 + \pi n$ eller

$x = 5{,}6909 + 2\pi n$

b) $x = 3{,}5687 + 2\pi n$ eller $x = 5{,}8561 + 2\pi n$

2.12 a) $x = 2{,}1421 + \pi n$ b) $x = 1{,}1839 + \pi n$

2.13 a) $T = 2$ sek. b) $t = 0{,}5$ sek. c) $t = 1{,}5$ sek.

2.14 a) $T = 3{,}14$ sek. b) $t = 1{,}29$ sek. c) $t = 2{,}86$ sek.

2.15 a) $T = 2{,}09$ sek. b) $t = 1{,}57$ sek. c) $t = 0{,}52$ sek.

2.16 a) $I(0) = 1{,}2$ ampere b) $I(3) = 2{,}38$ ampere c) $I_{max} = 4{,}4$ ampere, $I_{min} = -2$ ampere

d) $t = 12{,}5$ sek. e) $t = 37{,}5$ sek.

2.17 a) 33,55 liter b) $h = 19{,}2$ cm

2.18 a) - b) $f(t) = 0{,}802\sin(0{,}502t) + 2{,}5$ c) 1,6 meter d) 6,26 timer

2.19 a) $f(x) = 25\sin(0{,}04x - 0{,}5\pi) + 55$ b) –

## 3. Differentialregning II

3.01 a) $f'(x) = \cos x$ b) $(1{,}57;\ 3),\ (4{,}71;\ 1),\ (7{,}85;\ 3), (11;\ 1)$

3.02 a) $f'(x) = -2\sin x$ b) $(0, 1),\ (\pi; -3),\ (2\pi;\ 1),\ (3\pi; -3),\ (4\pi;\ 1)$

3.03 a) $f'(x) = \cos x - \sin x + \frac{1}{(\cos x)^2}$ b) $y = 2x + 1$ c) $y = 2x + 0{,}8434$

3.04 a) $f'(x) = 30x(7 + 3x^2)^4$ b) $f'(x) = 4(2 + 4x^2 - 9x^3)^3 \cdot (8x - 27x^2)$

c) $f'(x) = -15(5x - 3)^{-4}$ d) $f'(x) = 2{,}5(3 - x)^{-1{,}5}$

3.05 a) $f'(x) = 3\cos(3x)$ b) $f'(x) = 6\sin(3x)\cos(3x)$

c) $f'(x) = 18x \cdot \cos(3x)^2$ d) $f'(x) = -3(\sin(3x))^{-2} \cdot \cos(3x)$

3.06 a $f'(x) = 8\cos(1 - x)\sin(1 - x)$ b) $f'(x) = 18(\sin(3x))^2 \cdot \cos(3x)$

c) $f'(x) = \frac{-1{,}5\left(2-\sqrt{x+1}\right)^2}{\sqrt{x+1}}$ d) $f'(x) = -15x(1 - x^2)^{1{,}5}$

3.07 a) $v(t) = 10 - 9{,}82t$ b) 1,018 sek. c) $s = 8{,}09$ m d) $a(t) = -9{,}82\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{sek}^2}$

3.08 a) $Dm(f) = R$, skæringspunkter med *x*- og *y*-aksen: $(1,\ 0), (0,\ 4)$. $Min$: $(1, 0)$. Monotoniforhold: $f$ er aftagende i $]-\infty; 1]$ og voksende i $[1; \infty[$. $Vm(f) = [0; 3[$

b) Skæringspunkter med *x*- og *y*-aksen: $(0{,}6662;\ 0),\ (2{,}4754;\ 0),\ (0, -1)$.

Lokalt $max$: $(1{,}57;\ 1)$ og $(4{,}71; -1)$, Lokalt $min$: $(3{,}67; -1{,}25)$ og $(5{,}80; -1{,}25)$.

Monotoniforhold: $f$ er voksende i $[0;\ 1{,}57], [3{,}67;\ 4{,}71]$ og $[5{,}80;\ 2\pi]$.

$f$ er aftagende i $[1{,}57;\ 3{,}67]$ og $[4{,}71;\ 5{,}80]$. $Vm(f) = [-1{,}25;\ 1]$

c) $Dm(f) = R$. Skæringspunkter med $x$- og $y$-aksen: $(-1{,}16;\ 0), (0, 0), (5{,}16;\ 0.)$

Lokalt $min$ i $(-0{,}61; -0{,}97)$, lokalt $max$ i$(3{,}28;\ 13{,}71)$.

Monotoniforhold: $f$ er voksende i $[-0{,}61;\ 3{,}28]$ og $f$ er aftagende i $]-\infty; -0{,}61]$ og $[3{,}28;\ \infty[$

$Vm(f) = R$

d) $Dm(f) = [-3;\ 3]$. Skæringspunkter med $x$- og $y$-aksen: $(-3,\ 0), (3,\ 0), (0,\ 3)$

Maksimum i $(0,\ 3)$. Monotoniforhold: $f$ er voksende i $[-3,\ 0]$ og aftagende i $[0,\ 3]$

$Vm(f) = [0,\ 3]$

e) $Dm(f) = R$. Skæringspunkter med $x$- og $y$-aksen: $(0, 0), (1{,}59;\ 0)$. $Min$ i $(1; -0{,}75)$

Monotoniforhold: $f$ er aftagende i $]-\infty; 1]$ $og$ voksende i $[1; \infty[$. $Vm(f) = [-0{,}75; \infty[$

3.09 a) Centrum $(3, 4)$ og radius $r = 5$ b) –

3.10 a) $x^2 + (y + 44925)^2 = 45000^2$ b) $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{-2x}{2y+89850}$

c) $a_{AB} = 0{,}18,\ a_{CD} = -0{,}18$ d) $AB$: 1,8 %, $CD$: $-$ 1,8 %

## 4. Integralregning II

4.01 a) $\frac{1}{2}x^2 - \cos x + k$ b) $\frac{1}{3}x^3 - \ln|\cos x| + k$ c) $\sin x - x + k$ d) $-\cos x - \sin x + k$

4.02 a) 2 b) $-2$

4.03 a) - b) $A = 1$

4.04 a) - b) $A = 0{,}3466$

4.05 $A = 0{,}5$

4.06 $A = 4$

4.07 $A = 49{,}33$

4.08 $A = 74{,}67$

4.09 $A = 1$

4.10 a) $f(x) = 0{,}08x^2 + 2$ b) $A = 11{,}31$

4.11 $A = 2{,}6042$

4.12 $A = 81{,}86$

4.13 $A = 60{,}3$

4.14 $A = 10{,}5$

4.15 $A = 57{,}75$

4.16 $A = 64{,}67$

4.17 a) - b) $(1{,}047;\ 0{,}866)$ c) $A = 2{,}5$

4.18 a) - b) $V_x = 0{,}4488$

4.19 a) - b) $V_x = 944{,}36$

4.20 $V_x = \pi \cdot r^2 \cdot h$

4.21 a) - b) $V_x = 113{,}10$

4.22 a) - b) $V_x = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^2$

4.23 a) $y = -\frac{r}{h} \cdot x + r$ b) $V_x = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot h$

4.24 a) $y = \frac{r-R}{h} \cdot x + R$ b) $V = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot h(R^2 + r^2 + R \cdot r)$

4.25 a) - b) $A = 4{,}5$ c) $V_x = 19{,}27$

4.26 a) - b) $A = 0{,}67$ c) $V_x = 3{,}35$

4.27 a) $A = 0{,}9389$ b) $V_x = 14{,}89$

4.28 a) $V_x = 127{,}76$ b) $V_y = 301{,}59$

4.29 a) $V_x = 25{,}13\ \mathrm{cm}^3$ b) $V_y = 20{,}11\ \mathrm{cm}^3$ c) $h_x = 3{,}19\ \mathrm{cm}$, $h_y = 1{,}91\ \mathrm{cm}$

4.30 a) $V_x = 8{,}46$ b) $V_y = 7{,}66$

4.31 $L = 4{,}195$

4.32 $L = 6{,}096$

4.33 a) - b) $A = 1{,}913$ c) $L = 3{,}025$

4.34 a) - b) $A = 4{,}701$ c) $L = 3{,}104$

4.35 a) $V = 690{,}3\ m^3$

4.36 a) $V = 44{,}18\ \mathrm{cm}^3$ b) $h = 4{,}068\ \mathrm{cm}$ c) $V = 16{,}14\ \mathrm{cm}^3$

## 5. Differentialligninger

5.01 a) $y = 0{,}33x^3 + 3x + \mathrm{k}$  b) $y = 0{,}33x^3 + 3x - 5{,}67$

5.02 a) $y = 0{,}5x^4 + \mathrm{k}$  b) $y = 0{,}5x^4 + 1{,}5$

5.03 a) $v = t^2 - 6t + 6$  b) $a = 2t - 6$  c) –

5.04 a) $v = 2t^3 - 3t + 2$  b) $s = 0{,}5t^4 - 1{,}5t^2 + 2t$

5.05 a) $-0{,}0625x^4 + 0{,}167x^3 - 1{,}5x^2 + 2x + k$  b) $y = -x^3 + 2x^2 + k$

c) $y = 3{,}33x^3 + 6x^2 - 14x + k$  d) $y = \frac{2\sqrt{(x^3-2)^3}}{9} + k$

5.06 a) $y = 0{,}5\ln(x^2 + 4) + k$  b) $y = 0{,}5\ln(x^2 + 4) - 0{,}4979$

5.07 a) $y = 2x^3 + k$  b) $y = 2x^3 + 42$

5.08 a) $y = x^2 + k_1x + k_2$  b) $y = x^2 - 2x + 2$

5.09 a) $y = 0{,}0833x^4 + k_1x + k_2$  b) $y = 0{,}0833x^4 - 3x + 3{,}25$

5.10 a) $y = \pm ce^{0{,}5x^2}$  b) $y = e^{0{,}5x^2}$, $y = 2e^{0{,}5x^2}$, $y = 0{,}6065e^{0{,}5x^2}$, $y = 1{,}2131e^{0.5x^2}$

5.11 a) $y = \sqrt{10x - x^2 + 2k}$  b) $y = \sqrt{10x - x^2 + 15}$

5.12 a) $y = \sqrt{x^2 + k}$  b) $y = x$

5.13 a) $y \pm ce^{3x}$  b) $y = 0{,}4979e^{3x}$  c) $y = 30x - 20$

5.14 a) $y = ce^{0{,}5x}$  b) $y = 0{,}6065e^{0{,}5x}$, $y = 1{,}2131e^{0{,}5x}$

5.15 a) $y = \pm ce^x + 3$  b) $y = -2e^x + 3$

5.16 a) $y = 0{,}25x^2 + 1{,}5k^2 + 0{,}5xk$  b) $y = 0{,}25x^2 + 1{,}5x + 2{,}25$

5.17 a) $y = 0{,}5x^2 + 0{,}25k^2 + 0{,}5xk + 3$  b) $y = 0{,}25x^2 + 3$

5.18 a) $y = \frac{1{,}5}{1+ke^{-3x}}$  b) $y = \frac{1{,}5}{1+10{,}0428e^{-3x}}$

5.19 a) $y = \frac{2}{1+ke^{-8x}}$  b) $y = \frac{2}{1+3e^{-8x}}$, $y = \frac{2}{1+e^{-8x}}$, $y = \frac{2}{1+933e^{-8x}}$

5.20 $y = -0{,}167x^3 + 0{,}5x^2$

5.21 $y = \ln\left(\frac{-1}{e^x+k}\right)$

5.22 $y = \left(3\sqrt{3\sqrt{0{,}5x} - 2}\right)^2$

5.23 $y = -6{,}9988e^{-0{,}05x}$

5.24 a) $y = \frac{80000}{1+399e^{-0{,}4715x}}$ b) $x = 2, y = 511,\ x = 3, y = 816,\ x = 4, y = 1300,\ x = 5, y = 2063$

c) I uge nr. 13 vil halvdelen af befolkningen være smittet.

# Diskret Matematik
# Kapitel til Teknisk Matematik, Bind 3
# **Løsninger**

Thomas Bolander

8. august 2018

**Opgave 6.01** Rekursivt funktionsudtryk for det, man skylder, efter $n$ år:

$$f(n) = \begin{cases} 10.000 & \text{hvis } n = 0 \\ 1,35 \cdot f(n) & \text{hvis } n > 0 \end{cases}$$

Begyndelsesbetingelsen udtrykker, at når lånet optages skylder man 10.000 kr. Rekursionsbetingelsen udtrykker at hver gang $n$ stiger med én (der går et år), øges gælden med 35%. $f(10)$ kan nu bestemmes ved gentagen substitution:

$$\begin{aligned} f(10) &= 1,35 \cdot f(9) = 1,35 \cdot 1,35 \cdot f(8) = 1,35^2 \cdot f(8) = 1,35^2 \cdot 1,35 \cdot f(7) \\ &= 1,35^3 \cdot f(7) = \cdots = 1,35^{10} \cdot f(0) = 1,35^{10} \cdot 10.000 = 201.065. \end{aligned}$$

Det er med andre ord ret dyrt med den slags lån!

**Opgave 6.02** $f(0) = 2$, det aflæses direkte af begyndelsesbetingelsen. $f(1)$ fås ved indsættelse i rekursionsbetingelsen:

$$f(1) = 2 \cdot f(0) - 1 = 2 \cdot 2 - 1 = 3.$$

$f(2)$ kan så igen fås ved at indsætte ovenstående værdi for $f(1)$ i rekursionsbetingelsen:

$$f(2) = 2 \cdot f(1) - 1 = 2 \cdot 3 - 1 = 5.$$

**Opgave 6.03** Du løser den efter samme princip som Opgave 6.02. Begyndelsesbetingelsen giver os direkte værdien af $f(0)$ til at være 3. Det bruges så i rekursionsbetingelsen til at bestemme $f(1)$:

$$f(1) = 2 + 2 \cdot f(0) - 1 = 2 + 2 \cdot 3 - 1 = 7.$$

Det kan vi så bruge til at bestemme $f(2)$:

$$f(2) = 2 + 2 \cdot f(1) - 1 = 2 + 2 \cdot 7 - 1 = 15.$$

**Opgave 6.04** Som i de foregående to opgaver, pånær at $n$ nu optræder to steder i rekursionsbetingelsen, og vi skal huske at indsætte værdien af $n$ på begge pladser:

$$\begin{aligned}
&f(0) = 1\\
&f(1) = f(0)^2 + 4 \cdot 1 = 1^2 + 4 = 5\\
&f(2) = f(1)^2 + 4 \cdot 2 = 5^2 + 8 = 33\\
&f(3) = f(2)^2 + 4 \cdot 3 = 33^2 + 12 = 1101
\end{aligned}$$

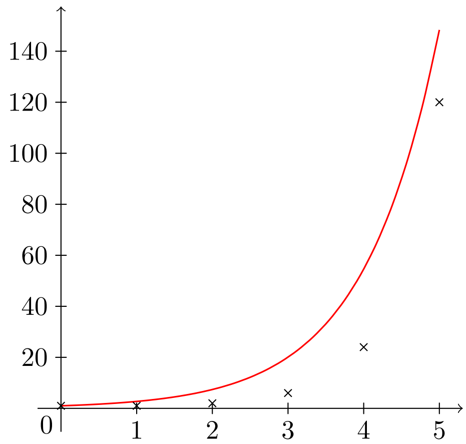
**Opgave 6.05** Eftersom de 7 forretter, 8 hovedretter og 3 desserter kan kombineres uafhængigt af hinanden, er antallet af kombinationsmuligheder produktet af antallet af muligheder i hver af de tre retter. Det er altså $7 \cdot 8 \cdot 3 = 168$.

**Opgave 6.06** Vi bruger gentagen substitution i den rekursive definition af fakultetsfunktionen:

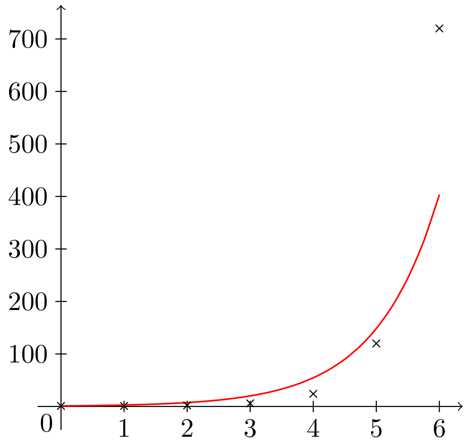
$$\begin{aligned}
5! &= 5 \cdot (5-1)! = 5 \cdot 4! = 5 \cdot 4 \cdot (4-1)! = 5 \cdot 4 \cdot 3! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1!\\
&= 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 0! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1 = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2.
\end{aligned}$$

I næstsidste omskrivning brugte vi begyndelsesbetingelsen $0! = 1$.

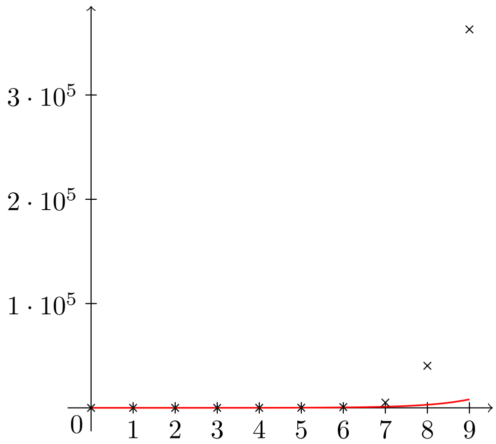
**Opgave 6.07** Herunder er først $n!$ i intervallet fra 0 til 5 markeret med sorte krydser og $e^n$ i samme interval vist ved den røde kurve.




Det kunne godt se ud som om fakultetsfunktionen vokser langsommere, men allerede hvis vi udvider intervallet til også at omfatte $n = 6$, kan vi se, at fakultetsfunktionen overhaler eksponentialfunktionen:




Og udvider vi med $n = 7$, $n = 8$ og $n = 9$, begynder eksponentialfunktionen at blive forsvindende lille i forhold til fakultetsfunktionen:




Det samme mønster vil gentage sig, hvis vi i stedet sammenligner fakultetsfunktionen med $10^n$ eller $100^n$, men der kræves selvfølgelig højere værdier af $n$ inden fakultetsfunktionen overhaler. Fakultetsfunktionen overhaler $10^n$ for $n = 25$. Den overhaler $100^n$ omkring $n = 450$, men mange lommeregnere og CAS-værktøjer giver op ved så høje tal ($450!$ er ca. $10^{1000}$).

**Opgave 6.08** De første to Fibonacci-tal fås direkte af begyndelsesbetingelserne: $f(0) = 1$ og $f(1) = 1$. De næste tal udregnes ved at bruge rekursionsbetingelsen:

$$\begin{aligned}
f(2) &= f(1) + f(0) = 1 + 1 = 2 \\
f(3) &= f(2) + f(1) = 2 + 1 = 3 \\
f(4) &= f(3) + f(2) = 3 + 2 = 5 \\
f(5) &= f(4) + f(3) = 5 + 3 = 8.
\end{aligned}$$

**Opgave 6.09** I Eksempel 6.04 er værdierne af $f(n)$ angivet op til $n = 7$. Vi kan bruge disse værdier til at udregne $f(8)$, $f(9)$ og $f(10)$:

$$f(8) = f(7) + f(6) = 21 + 13 = 34$$
$$f(9) = f(8) + f(7) = 34 + 21 = 55$$
$$f(10) = f(9) + f(8) = 55 + 34 = 89$$

**Opgave 6.10**

a) Efter 0 måneder (altså i begyndelsen) er der netop ét kaninpar. Efter 1 måned har de ikke nået at reproducere sig, så derfor er der stadig kun ét kaninpar. Efter 2 måneder reproducerer de sig første gang, og der er derfor 2 kaninpar. Det første kaninpar reproducerer sig igen efter 3 måneder, så der bliver der tilføjet et nyt kaninpar, altså har vi nu 3 i alt. Endelig, efter 4 måneder, reproducerer både det første og det andet kaninpar, så vi i alt har $3 + 2 = 5$ kaninpar. Altså bliver tallene $1, 1, 2, 3$ og $5$, som var det vi skulle vise.

b) Antallet af kaninpar efter $n$ måneder er summen af to tal $a$ og $b$ givet ved:

- $a$ = antallet af kaninpar som der var der i forvejen, dvs. antallet af kaninpar efter $n - 1$ måneder.
- $b$ = antallet af nye kaninpar som bliver født i den $n$'te måned.

Antallet $b$ af nye kaninpar er lig med antallet af kaninpar som fandtes efter $n - 2$ måneder, eftersom kaninerne begynder at reproducere efter 2 måneder. Altså får vi at antallet af kaninpar efter $n$ måneder er summen af to tal $a$ og $b$ givet ved:

- $a$ = antallet af kaninpar efter $n - 1$ måneder.
- $b$ = antallet af kaninpar efter $n - 2$ måneder.

Bruger vi nu $f(n)$ til at betegne antallet af kaninpar efter $n$ måneder fås således, at $f(n)$ er summen af to tal $a$ og $b$ givet ved:

- $a = f(n - 1)$
- $b = f(n - 2)$.

Med andre ord fås $f(n) = f(n - 1) + f(n - 2)$. Det er rekursionsbetingelsen for Fibonacci-tallene. Begyndelsesbetingelsen følger direkte af antallet af kaninpar efter 0 og 1 måned beregnet under a).

**Opgave 6.11** Se på definitionen af $f(2)$. Den er givet ved rekursionsbetingelsen, som giver os $f(2) = f(1) + f(-1)$. Problemet er her at definitionen ikke fortæller os hvad værdien af $f(-1)$ er. Indtil videre har alle vores rekursive funktioner kun været defineret på de naturlige tal, og så giver udtrykket $f(-1)$ slet ikke mening. Løsningen vil være at tilføje en begyndelsesbetingelse, som definerer $f(2)$. Alternativt skulle selve rekursionsbetingelsen ændres, så $f(n)$ ikke er defineret udfra $f(n - 3)$.

**Opgave 6.12**

a) En tom plade kan dækkes på netop én måde, så $f(0) = 1$. En plade af bredde 1 kan kun dækkes af en rød klods, så $f(1) = 1$. En plade af bredde 2 kan kun dækkes af 2 røde klodser, så $f(2) = 1$. En plade af bredde 3 kan enten dækkes af 3 røde klodser eller 1 blå, så $f(3) = 2$. En plade af bredde 4 kan dækkes af enten 1) 4 røde, 2) først en blå og så en rød eller 3) først en rød og så en blå. I alt fås så $f(4) = 3$. En plade af bredde 5 kan dækkes ved enten at starte med en rød, blå eller gul. Hvis vi starter med en rød, er der 4 knopper tilbage, som vi har set kan dækkes på $f(4) = 3$ måder. Hvis vi starter med en blå er der 2 knopper tilbage, som vi har set kan dækkes på $f(2) = 1$ måde. Hvis vi starter med en gul er der ingen knopper tilbage. Altså kan vi dække de 5 knopper på i alt $3 + 1 + 1 = 5$ måder.

Vi kan lave et tilsvarende regnestykke for $n = 6$. Vi starter med rød, blå eller gul. Hvis vi starter med rød, er der 5 knopper tilbage, som kan dækkes på $f(5) = 5$ måder. Hvis vi starter med blå, er der 3 knopper tilbage, som kan dækkes på $f(3) = 2$ måder. Hvis vi starter med gul, er der 1 knop tilbage, som kan dækkes på $f(1) = 1$ måde. I alt fås altså $f(6) = 5 + 2 + 1 = 8$.

b) Allerede i svaret til spørgsmål a) antydede vi en rekursionsbetingelse. Når man skal finde ud af, hvor mange måder man kan dække $n$ knopper på, gør man følgende. Først vælger man om man vil starte med rød, blå eller gul. Hvis man starter med rød, er der $n - 1$ knopper tilbage. Hvis $f(n)$ betegner antallet af måder, man kan dække $n$ knopper på, vil man altså kunne dække resten af pladen på $f(n - 1)$ forskellige måder, hvis man starter med rød. Hvis man starter med blå, er der $n - 3$ knopper tilbage, som kan dækkes på $f(n - 3)$ forskellige måder. Hvis man starter med gul, er der $n - 5$ knopper tilbage, som kan dækkes på $f(n - 5)$ forskellige måder. Alt dette forudsætter selvfølgelig at $n$ er stor nok, specifikt at $n \geq 5$. Hvis ikke $n \geq 5$, er det slet ikke sikkert vi kan lægge både røde, blå og gule klodser til at starte med.

Vi har altså at der er $f(n - 1)$ måder som starter med rød, $f(n - 3)$ måder som starter med blå og $f(n - 5)$ måder som starter med gul. I alt fås så

$$f(n) = f(n-1) + f(n-3) + f(n-5).$$

Dette gælder som sagt dog kun når $n \geq 5$. Så vi bliver nødt til at lave begyndelsesbetingelser for alle værdierne $f(0), f(1), f(2), f(3)$ og $f(4)$! De relevante værdier af disse begyndelsebetingelser fandt vi under a). Den samlede definition af funktionen bliver så:

$$f(n) = \begin{cases} 1 & \text{hvis } n = 0,\ n = 1 \text{ eller } n = 2 \\ 2 & \text{hvis } n = 3 \\ 3 & \text{hvis } n = 4 \\ f(n-1) + f(n-3) + f(n-5) & \text{hvis } n \geq 5 \end{cases}$$

c) Vi kan nu bruge ovenstående funktionsudtryk til at beregne $f(5)$ og $f(6)$:

$$\begin{aligned} f(5) &= f(4) + f(2) + f(0) = 3 + 1 + 1 = 5 \\ f(6) &= f(5) + f(3) + f(1) = 5 + 2 + 1 = 8. \end{aligned}$$

Det passer med hvad vi fik under spørgsmål a).

**Opgave 6.13** Som i Eksempel 6.05 viser man begyndelsesbetingelsen og rekursionsbetingelsen ved at indsætte det lukkede udtryk for $f(n)$ og omskrive:

$$\begin{array}{ll} f(0) = 4^0 = 1 & \text{begyndelsebetingelse} \\ f(n) = 4^n = 4 \cdot 4^{n-1} = 4 \cdot f(n-1) & \text{rekursionsbetingelse} \end{array}$$

**Opgave 6.14** Som i Opgave 6.14 skal vi bruge det lukkede udtryk til at vise at den rekursive definition holder. I dette tilfælde er det lukkede udtryk definitionen af $f(n)$ som siger, at $f(n) = 0$, når $n$ er ulige, og $f(n) = 1$, når $n$ er lige. Eftersom 0 er et lige tal, fås $f(0) = 1$, og det viser begyndelsesbetingelsen af den rekursive definition. Vi skal nu vise rekursionsbetingelsen $f(n) = 1 - f(n-1)$ for $n > 0$. Udfra det lukkede udtryk har vi, at $f(n)$ altid skifter mellem at være 0 eller 1. Mere præcist har vi, at $f(n) = 0$ hvis og kun hvis $f(n-1) = 1$; og omvendt, at $f(n) = 1$ hvis og kun hvis $f(n-1) = 0$. I alle tilfælde får vi således, at $f(n) = 1 - f(n-1)$. Det viser rekursionsbetingelsen.

**Opgave 6.15**

a) Første vers har 3 linjer, så $f(0) = 3$. Hvert vers i sangen har 1 linje mere end foregående vers. Derfor gælder $f(n) = f(n-1) + 1$ for $n > 0$. I alt bliver den rekursive definition så:

$$f(n) = \begin{cases} 3 & \text{hvis } n = 0 \\ n + 1 & \text{hvis } n > 0 \end{cases}$$

b) Det passer på formen hvis vi vælger $a = 3$ og $b = 1$.

c) Det eksplicitte udtryk bliver $f(n) = a + nb = 3 + n$. Det 11'te vers har $f(10)$ linjer, som nu kan udregnes til $f(10) = 3 + 10 = 13$. Det passer med den oprindelige version af sangen.

**Opgave 6.16** I løsningen til Opgave 6.01 fandt vi følgende rekursive udtryk for $f(n)$:

$$f(n) = \begin{cases} 10.000 & \text{hvis } n = 0 \\ 1,35 \cdot f(n) & \text{hvis } n > 0 \end{cases}$$

Det passer på formen angivet i formlen (7), hvis vi vælger $a = 10.000$ og $b = 1,35$. Formlen (8) angiver da det tilsvarende eksplicitte udtryk:

$$f(n) = a \cdot b^n = 10.000 \cdot 1,35^n.$$

Vi får så (igen) $f(10) = 10.000 \cdot 1,35^10 = 201.065$.

**Opgave 6.17**

a) Det første trekanttal har to 1 punkt i bunden, det næste har 2, det efterfølgende 3, osv. For at danne det næste trekanttal skal vi tilføje et ekstra punkt i bunden, og dernæst fylde punkter op så formen igen bliver en trekant. Hvis vi gør det på trekantfiguren, som svarer til tallet 21, får vi en trekantfigur med 7 nye punkter, altså $21 + 7 = 28$ kugler i alt.

b) Som beskrevet i opgaven skal vi finde ud af hvor mange punkter der tilføjes når vi går fra den $n-1$'te til den $n$'te trekant. Når vi går fra den første til den anden, tilføjer vi 2 punkter. Når vi går fra den anden til den tredje, tilføjer vi 3 punkter. Generelt kan vi se, at når vi går fra den $n-1$'te til den $n$'te trekantfigur, så tilføjer vi altid $n$ punkter. Vi får altså:

$$\begin{aligned} f(n) &= f(n-1) + \text{antal ekstra punkter} \\ &= f(n-1) + n \end{aligned}$$

Begyndelsesbetingelsen er blot $f(0) = 0$, fordi det første trekanttal er 0 (den tomme trekant). I alt bliver den rekursive definition således:

$$f(n) = \begin{cases} 0 & \text{hvis } n = 0 \\ f(n-1) + n & \text{hvis } n > 0 \end{cases}$$

Her kan det være en god idé at tjekke at udtrykket passer med de tal vi allerede kender for $f(n)$. Vi får f.eks. ved gentagen substitution at der gælder:

$$\begin{aligned} f(6) &= f(5) + 6 = f(4) + 5 + 6 = f(3) + 4 + 5 + 6 = f(2) + 3 + 4 + 5 + 6 \\ &= f(1) + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = f(0) + 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 \\ &= 0 + 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = 21. \end{aligned}$$

Det passer heldigvis (den sjette trekantfigur har 21 punkter).

c) Vi indsætter det eksplicitte udtryk for $f(n)$ og viser at det opfylder begyndelsesbetingelsen og rekursionsbetingelsen fra spørgsmål b). Vi viser først begyndelsesbetingelsen:

$$f(0) = \frac{0 \cdot 1}{2} = 0.$$

Det passer. Rekursionsbetingelsen er lidt sværere, og kræver at man laver nogle smarte omskrivninger:

$$f(n) = \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n^2+n}{2} = \frac{n^2-n+2n}{2} = \frac{n^2-n}{2} + n = \frac{(n-1)n}{2} + n = f(n-1) + n.$$

d) Hvis der er 0 gæster, er der ingen at give hånd til. Så $f(0) = 0$, hvilket passer med begyndelsesbetingelsen af det rekursive udtryk ovenfor. Vi mangler så kun at vise, at hvis der er $n$ gæster for $n > 0$, så bliver der givet netop $f(n)$ håndtryk, hvor $f(n)$ er givet ved det rekursive udtryk ovenfor: $f(n) = f(n-1) + n$. Vi skal altså vise, at med $n$ gæster bliver der givet $n$ flere håndtryk end hvis der kun er $n-1$ gæster. Men det er klart: hvis der i forvejen er $n-1$ gæster, og der så kommer en mere, så skal den nyankomne give hånd til værten og de $n-1$ andre gæster. Det er netop $n$ ekstra håndtryk.

**Opgave 6.18**

a) Vi benytter gentagen substitution:

$$\begin{aligned}\mathrm{sfd}(384,162) &= \mathrm{sfd}(162,\mathrm{rest}(384,162)) = \mathrm{sfd}(162,60) = \mathrm{sfd}(60,\mathrm{rest}(162,60))\\ &= \mathrm{sfd}(60,42) = \mathrm{sfd}(42,\mathrm{rest}(60,42)) = \mathrm{sfd}(42,18)\\ &= \mathrm{sfd}(18,\mathrm{rest}(42,18)) = \mathrm{sfd}(18,6) = \mathrm{sfd}(6,\mathrm{rest}(18,6)) = \mathrm{sfd}(6,0) = 6.\end{aligned}$$

b) Vi skal finde de størst mulige kvadratiske fliser, som præcist kan dække ef gulv at størrelse $384cm \times 162cm$. Vi kan antage at $384cm$ er "bredden" og $162cm$ er "højden" af gulvet. For at fliserne kan dække gulvet præcist, skal der være et helt antal fliser i både bredden og højden. Hvis flisen har en siddelængde på $x$ cm, skal $x$ således gå op i både 384 og 162. Vi vil gerne have at $x$ er så stor som muligt, så vi er altså på jagt efter det største tal $x$, som går op i både 384 og 162. Det er jo netop største fælles divisor af 384 og 162, som vi ovenfor beregnede til 6. Den maksimale kvadratiske flise, vi kan benytte, har altså en siddelængde på $6cm$.

**Opgave 6.19**

| $p$ | $q$ | $\neg q$ | $\neg q \vee p$ | $p \to (\neg q \vee p)$ |
|---|---|---|---|---|
| S | S | F | S | S |
| S | F | S | S | S |
| F | S | F | F | S |
| F | F | S | S | S |

**Opgave 6.20**

| $p$ | $q$ | $q \vee \neg q$ | $p \wedge (q \vee \neg q)$ |
|---|---|---|---|
| S | S | S | S |
| S | F | S | S |
| F | S | S | F |
| F | F | S | F |

**Opgave 6.21**

| $p$ | $q$ | $p \to q$ | $(p \to q) \to p$ | $((p \to q) \to p) \to q$ |
|---|---|---|---|---|
| S | S | S | S | S |
| S | F | F | S | F |
| F | S | S | F | S |
| F | F | S | F | S |

**Opgave 6.22**

a) Der er brug for to nye udsagnsvariable: $m$ for at lave mad, og $k$ for at købe ind.

b) Kriterium 4 er, at *hvis* Selma skal lave mad ($m$), *så* skal hun købe ind først ($k$). Det svarer således til formlen $m \to k$. Kriterium 5 er, at *hvis* Selma skal købe ind ($k$), *så* kan hun *ikke* nå i biografen ($b$) *og ikke* lave afleveringsopgave ($a$). Altså, hvis $k$ så ikke $b$ og ikke $a$. Det bliver til formlen $k \to (\neg b \wedge \neg a)$.

c) Den samlede logiske formel for kriterierne 1–5 fås ved blot at tilføje de to nye kriterier fra b) som konjunkter til Selmas formel:

$$(b \vee h) \wedge (h \to \neg b) \wedge (\neg h \to \neg a) \wedge (m \to k) \wedge (k \to (\neg b \wedge \neg a)).$$

Hvis man skulle lave en sandhedstabel for denne formel, ville man have brug for $2^5 = 32$ rækker, fordi der er i alt 5 udsagnsvariable i formlen: $a$, $b$, $h$, $k$ og $m$.

**Opgave 6.23**

a) $p \vee \neg q$.

b) $q \vee r$.

c) $\neg r \vee \neg p$.

d) $(p \vee \neg q) \wedge (p \vee r) \wedge (\neg r \vee \neg p)$.

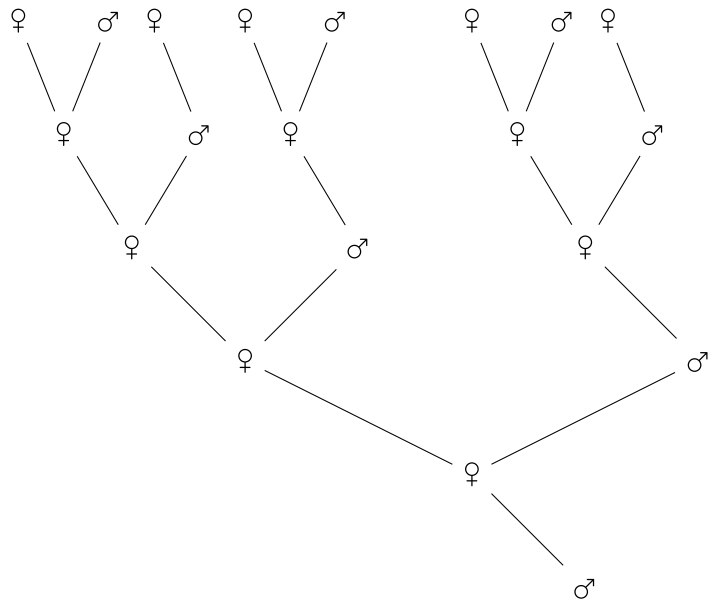
e)

| $p$ | $q$ | $r$ | $p \vee \neg q$ | $q \vee r$ | $\neg r \vee \neg p$ | $(p \vee \neg q) \wedge (p \vee r) \wedge (\neg r \vee \neg p)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| S | S | S | S | S | F | F |
| S | S | F | S | S | S | S |
| S | F | S | S | S | F | F |
| S | F | F | S | F | S | F |
| F | S | S | F | S | F | F |
| F | S | F | F | S | S | F |
| F | F | S | S | S | S | S |
| F | F | F | S | F | S | F |

Der er kun to løsninger, svarende til de to rækker hvor formlen fra d) er sand. I den første af disse rækker har vi $p : \mathtt{S}, q : \mathtt{S}, r : \mathtt{F}$. Det svarer til, at vi inviterer Peru og Qatar, men afviser Rumænien. I den anden har vi $p : \mathtt{F}, q : \mathtt{F}, r : \mathtt{S}$. Det svarer til at afvise Peru og Qatar, men invitere Rumænien. Begge muligheder kan ses at opfylde både kronprinsen, dronningen og kongens krav.

### Opgave 6.24

a)



b) Vi fortsætter talfølgen ved at tælle antal bier i de to nye generationer tilføjet ovenfor (de to øverste rækker af stamtræet): $1, 1, 2, 3, 5, 8$.

c) Værdierne af $f(3)$, $f(4)$ og $f(5)$ kan vi direkte aflæse af talfølgen fra b). De er $f(3) = 3$, $f(4) = 5$ og $f(5) = 8$. For at bestemme $f(6)$ skal vi gå endnu en generation tilbage. Det kan gøres ved at tilføje en ekstra generation til stamtræet ovenfor, eller blot at udregne hvor mange bier der vil være i en sådan ekstra generation. Hver af hunbierne i den ældste generation på stamtræet ovenfor har 2 forældre, og hver af hanbierne har 1 forældre. Der er 5 hunbier i den ældste generation, og 3 hanbier. Altså vil den ekstra generation have $5 \cdot 2 + 3 = 13$ bier, og hermed fås $f(6) = 13$.

d) Denne opgave løses ved blot at bruge stamtræet til at tjekke, at tallene passer.

e) Grunden til der gælder $f_♀(n) = f(n-1)$ for alle $n > 0$ er, at hver bi har én og kun én mor. Så det samlede antal af bier $n-1$ generationer tilbage, $f(n-1)$, må være lige med antallet af mødre én generation længere tilbage, $f_♀(n)$.

f) Denne opgave løses også ved blot at bruge stamtræet til at tjekke, at tallene passer.

g) Grunden til at der gælder $f_♂(n) = f_♀(n-1)$ for alle $n > 0$ er, at hver hunbi har netop én far, mens ingen hanbier har en far. Så antallet af hunbier $n-1$ generationer tilbage, $f_♀(n-1)$, må dermed være lig med antallet af fædre én generation længere tilbage, $f_♂(n)$.

10

h) Det samlede antal bier $n$ generationer tilbage er naturligvis summen af antal hanbier og antal hunbier $n$ generationer tilbage. Altså $f(n) = f_{♀}(n) + f_{♂}(n)$. Bruger vi resultaterne fra spørgsmål e) og g) fås så:

$$f(n) = f_{♀}(n) + f_{♂}(n) = f(n-1) + f_{♀}(n-1) = f(n-1) + f(n-2).$$

**Opgave 6.25** Bemærk først, at tallet i nederste højre hjørne af tabellen skulle have været et 1-tal: dødeligheden af rotter i alderen 2–3 er 100%.

a) Vi bestemmer først antal rotter i aldersgruppen 0–1 efter 1 år. Det er de rotter, som bliver født i løbet af det første år. Ifølge tabellen vil der i gennemsnit blive født $0,1$ barn per rotte i alderen 0–1, $0,7$ barn per rotte i alderen 1–2 og $0,1$ barn per rotte i alderen 2–3. Der vil altså i gennemsnit i løbet af det første år blive født

$$0,1 \cdot f_{[0;1]}(0) + 0,7 \cdot f_{[1;2]}(0) + 0,1 \cdot f_{[2;3]}(0) = 0,1 \cdot 15 + 0,7 \cdot 10 + 0,1 \cdot 5 = 9$$

børn. Vi får således, at antallet af rotter i alderen 0–1 efter 1 år i gennemsnit er 9, altså $f_{[0;1]}(1) = 9$.

Vi bestemmer nu antal rotter i aldersgruppen 1–2 efter 1 år. Det er dem, af de oprindelige 15 rotter i aldersgruppen 0–1 år, som overlever det første år. Dødeligheden i denne gruppe er 20%, så i gennemsnit vil $0,8 \cdot 15 = 12$ af dem overleve. Altså vil der i gennemsnit efter 1 år være 12 rotter i aldersgruppen 1–2 år, $f_{[1;2]}(1) = 12$.

Vi bestemmer nu antal rotter i aldersgruppen 2–3 efter 1 år. Det er dem, af de oprindelige 10 rotter i aldersgruppen 1–2 år, som overlever det første år. Vi får altså, i stil med ovenfor, $f_{[2;3]}(1) = 0,8 \cdot 10 = 8$.

b) Vi bestemmer først et rekursivt funktionsudtryk for $f_{[0;1]}(n)$. Begyndelsesbetingelsen er $f_{[0;1]}(0) = 15$. Rekursionsbetingelsen fås ved at se på, hvor mange rotter der er i aldersgruppen 0–1 efter $n$ år. Det er alle de rotter som er blevet født i løbet af det forløbende år, hvilket vi ligesom i a) udregner ved at se på hvor mange rotter der var i hver aldersgruppe det foregående år, og så gange det med fødselsraten. Vi får så:

$$f_{[0;1]}(n) = 0,1 \cdot f_{[0;1]}(n-1) + 0,7 \cdot f_{[1;2]}(n-1) + 0,1 \cdot f_{[2;3]}(n-1)$$

Sætter vi begyndelsesbetingelsen og rekursionsbetingelsen sammen, får vi følgende rekursive funktionsudtryk for $f_{[0;1]}(n)$:

$$f_{[0;1]}(n) = \begin{cases} 15 & \text{hvis } n = 0 \\ 0,1 \cdot f_{[0;1]}(n-1) + 0,7 \cdot f_{[1;2]}(n-1) + 0,1 \cdot f_{[2;3]}(n-1) & \text{hvis } n > 0 \end{cases}$$

Vi bestemmer nu et rekursivt funktionsudtryk for $f_{[1;2]}(n)$. Begyndelsesbetingelsen er $f_{[1;2]}(0) = 10$. Rekursionsbetingelsen fås ved at se på, hvor mange rotter der er i aldersgruppen 1–2 efter $n$ år. Det er alle de rotter, som det foregående år var i aldersgruppen 0–1 og er overlevet. Det udregnes på samme måde som i a), hvilket giver:

$$f_{[1;2]}(n) = 0,8 \cdot f_{[0;1]}(n-1).$$

Sætter vi begyndelsesbetingelsen og rekursionsbetingelsen sammen, får vi følgende rekursive funktionsudtryk for $f_{[1;2]}(n)$:

$$f_{[1;2]}(n) = \begin{cases} 10 & \text{hvis } n = 0 \\ 0,8 \cdot f_{[0;1]}(n-1) & \text{hvis } n > 0 \end{cases}$$

På tilsvarende vis får vi et rekursivt funktionsudtryk for $f_{[2;3]}(n)$:

$$f_{[2;3]}(n) = \begin{cases} 5 & \text{hvis } n = 0 \\ 0,8 \cdot f_{[1;2]}(n-1) & \text{hvis } n > 0 \end{cases}$$

c) Vi kan nu bestemme det samlede antal rotter efter 3 år ved at bruge gentagen substitution på ovenstående rekursive funktionsudtryk:

$$\begin{aligned} f(3) &= f_{[0;1]}(3) + f_{[1;2]}(3) + f_{[2;3]}(3) \\ &= 0,1 \cdot f_{[0;1]}(2) + 0,7 \cdot f_{[1;2]}(2) + 0,1 \cdot f_{[2;3]}(2) + 0,8 \cdot f_{[0;1]}(2) + 0,8 \cdot f_{[1;2]}(2) \\ &= 0,9 \cdot f_{[0;1]}(2) + 1,5 \cdot f_{[1;2]}(2) + 0,1 \cdot f_{[2;3]}(2) \\ &= 0,9 \cdot (0,1 \cdot f_{[0;1]}(1) + 0,7 \cdot f_{[1;2]}(1) + 0,1 \cdot f_{[2;3]}(1)) + 1,5 \cdot 0,8 \cdot f_{[0;1]}(1) + \\ &\quad\; 0,1 \cdot 0,8 \cdot f_{[1;2]}(1) \\ &= 1,29 \cdot f_{[0;1]}(1) + 0,71 \cdot f_{[1;2]}(1) + 0,09 \cdot f_{[2;3]}(1) \end{aligned}$$

Vi kan nu indsætte værdierne af $f_{[0;1]}(1)$, $f_{[1;2]}(1)$ og $f_{[2;3]}(1)$ som vi fandt under a). Hermed fås:

$$\begin{aligned} f(3) &= 1,29 \cdot f_{[0;1]}(1) + 0,71 \cdot f_{[1;2]}(1) + 0,09 \cdot f_{[2;3]}(1) \\ &= 1,29 \cdot 9 + 0,71 \cdot 12 + 0,09 \cdot 8 \\ &= 20,85. \end{aligned}$$

I gennemsnit vil der altså være knapt 21 rotter efter 3 år.

### Opgave 6.26

a) Vi har brug for følgende udsagnsvariable:

- $s$: Simon kommer for sent til sit møde.
- $u$: Simon føler sig slået ud.
- $j$: Simon får jobbet.

- $t$: Simon tager en taxi hjem.

b) Sætning 1 bliver til $(s \wedge u) \to t$. Sætning 2 bliver til $\neg j \to u$. Sætning 3 bliver til $(s \wedge \neg t) \to j$.

c) Vi skal lave en sandhedstabel for den formel som siger, at sætning 1 og sætning 2 tilsammen medfører sætning 3. Det er følgende formel:

$$\big(((s \wedge u) \to t) \wedge (\neg j \to u)\big) \to \big((s \wedge \neg t) \to j\big)$$

Her skal man holde tungen lige i munden med de mange paranteser. Sandhedstabellen får hele $2^4 = 16$ rækker, fordi der er 4 udsagnsvariable.

| $j$ | $s$ | $t$ | $u$ | $s \wedge u$ | $(s \wedge u) \to t$ | $\neg j \to u$ | $s \wedge \neg t$ | $(s \wedge \neg t) \to j$ | hele formlen |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| S | S | S | S | S | S | S | F | S | S |
| S | S | S | F | F | S | S | F | S | S |
| S | S | F | S | S | F | S | S | S | S |
| S | S | F | F | F | S | S | S | S | S |
| S | F | S | S | F | S | S | F | S | S |
| S | F | S | F | F | S | S | F | S | S |
| S | F | F | S | F | S | S | F | S | S |
| S | F | F | F | F | S | S | F | S | S |
| F | S | S | S | S | S | S | F | S | S |
| F | S | S | F | F | S | F | F | S | S |
| F | S | F | S | S | F | S | S | F | S |
| F | S | F | F | F | S | F | S | F | S |
| F | F | S | S | F | S | S | F | S | S |
| F | F | S | F | F | S | F | F | S | S |
| F | F | F | S | F | S | S | F | S | S |
| F | F | F | F | F | S | F | F | S | S |

Alle rækker i sandhedstabellen gør formlen sand (sidste søjle), så formlen er gyldig. Dermed er slutningen logisk korrekt. Det er altså rigtigt, at hvis de to præmisser er opfyldt for Simon, så er konklusionen også opfyldt. Man kan også prøve at kigge på de rent sproglige formuleringer af præmisser og konklusion, for at overbevise sig selv om at slutningen holder, men der går let kludder i argumentationen. Det vi i stedet har gjort ovenfor er at give et helt håndfast matematisk bevis for at slutnigen holder.

## 7. Vektorfunktioner

7.01 a) –

b) $(0{,}2)$ $(0{,}5)$

c)

| $t$ | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| $x$ | 0 | 2,5 | 2 | -4,5 |
| $y$ | 2 | 2,5 | 4 | 6,5 |

d) -

e) Mindste afstand: 3,42

7.02 a) $y = x + 2$

b) $y = x^2 + x - 5$

c) $y = 5\sin(\cos^{-1}(0{,}5x))$

7.03 a) $\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} t^2 + 4t - 2 \\ t \end{pmatrix}$

b) $\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} t^2 + 4t^5 - 3t^3 \\ t \end{pmatrix}$

7.04 a) $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 + t \\ 5 + 2t \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 + 13t \\ 3 + 5t \end{pmatrix}$ eller $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 + 13t \\ -2 + 5t \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 + t\cos 120° \\ -1 + t\sin 120° \end{pmatrix}$

7.05 a) $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 + 3\cos t \\ 5 + 3\sin t \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 + 5\cos t \\ 3 + 5\sin t \end{pmatrix}$

7.06 a) $(-2{,}1)$

b) Storakse: 8   Lilleakse: 6

c) Mindste afstand: 3,37

7.07 a) –

b) $\vec{v}(t) = \begin{pmatrix} 15 \\ -10t + 15 \end{pmatrix}$

c) $(22{,}5;\ 51{,}25)$

d) $(70{,}5;\ 0)$

e) $35{,}34\ \mathrm{m/sec}$

7.08 a) –

b) $\vec{v}(t) = \begin{pmatrix} 2t \\ 1 \end{pmatrix}$

c) $(x, y) = (4, 3)$

7.09 a) –

b) $\vec{v}(t) = \begin{pmatrix} 2 \\ -10t + 12 \end{pmatrix}$

c) $(0{,}4;\ 37{,}2)$

7.10 a) $\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} 0{,}2t \\ 0{,}08t \end{pmatrix} \quad t \geq 0$

b) $(0{,}4;\ 016)$

c) –

7.11 a) $\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} 0{,}5t + 2\cos(2t) \\ 2\sin(2t) \end{pmatrix}$

b) –

c) $(0{,}394;\ 2) \quad (1{,}177; -2) \quad (1{,}963;\ 2) \quad (2{,}750; -2)$

d) $(2{,}016;\ 0{,}250) \quad (-1{,}230;\ 0{,}250) \quad (3{,}586;\ 0{,}250) \quad (0{,}341;\ 0{,}250)$

e) $(1{,}177; -2) \quad (2{,}750; -2)$

f) $\text{Højeste fart} = 4{,}5\ \text{meter/sekund}$

7.12 a) –

b) $\text{Omkreds} = 26{,}73$

7.13 a) –

b) $(0, 0) \quad (1{,}0) \quad (-1{,}0)$

c) $(0{,}707;\ 1) \quad (0{,}707; -1) \quad (-0{,}707;\ 1) \quad (-0{,}707; -1)$

d) $(1{,}0) \quad (-1{,}0)$

7.14 a) –

b) $(0,2)\quad(0;\ 4,637)$

c) $(\pi,\ 6)\quad(2\pi,\ 2)\quad(3\pi,\ 6)$

d) $(-0,685;\ 3)\quad(6,968;\ 3)\quad(5,598;\ 3)$

e) $\text{Fart} = 2,89\ \text{meter/sekund}$

7.15 a) –

b) $(0,1)$

c) $(-0,58;\ 3,37)\quad(0,58;\ 1,64)$

d) $(0,39;\ 3,41)\quad(-0,13;\ 0,59)\quad(-0,57;\ 3,41)\quad(0,36;\ 0,59)$

e) $(0,377;\ 3,411)$

7.16 a) $\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} 3\cos(1t) + 1\cos(-5t) \\ 3\sin(1t) + 1\sin(-5t) \end{pmatrix}$

b) –

c) $(0,2)\quad(0,-2)\quad(4,0)\quad(2,71;\ 0)\quad(-2,71;\ 0)\quad(-4,0)$

d) $(1,73;\ 1)\quad(0,2)\quad(-1,73;\ 1)\quad(-1,73;-1)\quad(0,-2)\quad(1,73;-1)$